

*Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária  
Secretaria de Administração Estratégica  
Ministério da Agricultura e do Abastecimento*

# **Introdução aos Modelos de Regressão Linear e Não-Linear**

**Geraldo da Silva e Souza**

*Serviço de Produção de Informação  
Brasília, DF  
1998*

**Exemplares desta publicação podem ser adquiridos na:**

**Embrapa Informação Tecnológica**

Parque Estação Biológica (PqEB) Av. W3 Norte (final)  
70770-901 Brasília, DF  
Tel.: (61) 3340-9999  
Fax: (61) 3340-2753  
vendas@sct.embrapa.br  
www.sct.embrapa.br/liv

**Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária**

Secretaria de Gestão e Estratégia  
Edifício-sede da Embrapa  
Parque Estação Biológica (PqEB) Av. W3 Norte (final)  
70770-901 Brasília, DF  
Tel.: (61) 3348-4466 – 3448-4194  
Fax: (61) 3448-4319 – 3347-4480

**Coordenação editorial e gráfica**

Embrapa Informação Tecnológica

**Tratamento editorial**

Francisco C. Martins

**Capa**

Carlos Eduardo Felice Barbeiro

**Revisão de texto**

Maria Lúcia Del Fiaco Rocha

**Revisão de provas**

Ana Carolina Silva Cirotto

**Normalização bibliográfica**

Rosa Maria e Barros Ferreira

**1ª edição**

1ª impressão (1998): 1.000 exemplares

2ª impressão (2001): 500 exemplares

3ª impressão (2007): 300 exemplares

**Todos os direitos reservados**

A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação dos direitos autorais (Lei nº 9.610).

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**

Embrapa Informação Tecnológica

---

Souza, Geraldo da Silva e

Introdução aos modelos de regressão linear e não-linear / Geraldo da Silva e Souza. — Brasília: Embrapa-SPI / Embrapa-SEA, 1998.

505 p.

ISBN 85-7383-020-4

1. Análise Estatística. I. Título

CDD 519.536

© Embrapa 1998

# Prefácio

A idéia de escrever este livro introdutório em regressão linear e não-linear surgiu da ausência de um texto semelhante em nossa língua. Este material cobre três cursos que tenho a oportunidade de, freqüentemente, ministrar no programa de mestrado em Estatística da Universidade de Brasília: Métodos Estatísticos, Modelos Lineares e Regressão Não-Linear. Para o curso de Métodos, mais voltado para aplicações, omito os Capítulos 1, 3 e 5. No Capítulo 2, a ênfase é dada somente às aplicações do modelo linear de posto completo. Nesse contexto, um curso de um semestre em aplicações do modelo linear pode ser levado a efeito cobrindo a parte relevante do Capítulo 2 (Seção 2.1), o Capítulo 4 e a parte do Capítulo 6 sobre conceitos básicos de regressão não-linear. Tenho usado este material com sucesso nos cursos da UnB em associação com o uso intensivo do computador, particularmente com o SAS (Statistical Analysis System). O curso de Modelos Lineares inclui o Capítulo 3 e todo o material não abordado no curso de Métodos. Os Capítulos 5-8 servem ao propósito de introdução, teórica e aplicada, à regressão não-linear. Desse modo, serve de base para a leitura de textos mais avançados.

Em minha exposição, procuro ilustrar com exemplos os principais conceitos. Ao final de todos os capítulos, apresento um conjunto de problemas. Uns fáceis, outros mais complexos e envolventes e que complementam a teoria desenvolvida no texto. Encorajo o leitor a gastar algum tempo com a solução desses problemas. Para

um bom aproveitamento do texto, o leitor deve estar bem familiarizado com o Cálculo de Várias Variáveis e com a Álgebra Linear. O conhecimento dos fundamentos de programação SAS também é desejável. Todas as ilustrações e rotinas desenvolvidas no texto foram levadas a efeito com o uso do SAS.

Escrevi este livro ao longo de três anos, em diferentes locais. Particularmente importante nesse período, foi o ano que passei como professor visitante do Departamento de Economia da Universidade da Carolina do Norte em Chapel Hill. Muito do que aqui apresento foi resultado de edificantes conversações com A. R. Galant, meu amigo e paciente professor.

Escrever um livro, por mais simples que seja, é uma tarefa árdua que demanda bastante sacrifício e o esforço de muitos. Nesse contexto, sou grato a minha família pela paciência e compreensão pelos inúmeros fins-de-semana perdidos. Também sou grato aos meus estudantes, particularmente a George Freitas von Borries. As rotinas para o cálculo de regressões robustas e de “bootstrap” fazem parte de sua dissertação de mestrado.

Finalmente agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo suporte financeiro parcial e à Embrapa pelo interesse em publicar este livro.

Geraldo da Silva e Souza

*Janeiro de 1998*  
*Brasília, DF*

# Sumário

<b>1</b>	<b>Resultados Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1	Tópicos em Álgebra Linear . . . . .	1
1.2	Extremos de Formas Quadráticas . . . . .	16
1.3	A Normal Multivariada . . . . .	17
1.4	Formas Quadráticas . . . . .	27
1.5	Seqüências de Variáveis Aleatórias . . . . .	33
1.6	Exercícios . . . . .	44
1.7	Referências . . . . .	52
<b>2</b>	<b>Modelos de Regressão Linear</b>	<b>53</b>
2.1	Modelos de Posto Completo . . . . .	53
2.1.1	Introdução . . . . .	53
2.1.2	O Princípio dos Mínimos Quadrados . . . . .	57
2.1.3	Propriedades Estatísticas e Distribucionais . . . . .	63
2.1.4	Regiões de Confiança . . . . .	66
2.1.5	Testes de Hipóteses Lineares . . . . .	72
2.1.6	Análise de Variância na Regressão Linear . . . . .	77
2.1.7	Determinação da Potência de Testes Estatísticos . . . . .	80
2.1.8	Estimação e Testes de Funções Não-Lineares . . . . .	84
2.1.9	Mínimos Quadrados Generalizados . . . . .	87
2.2	Modelos de Posto Incompleto . . . . .	95

2.2.1	Propriedades Estatísticas e Distribucionais . . . . .	98
2.2.2	Regiões de Confiança . . . . .	100
2.2.3	Testes de Hipóteses Lineares . . . . .	101
2.2.4	Análise de Variância no Modelo Linear de Posto Incompleto . . . . .	105
2.2.5	Análise de Ensaios em Blocos Incompletos . . . . .	105
2.3	Exercícios . . . . .	127
2.4	Referências . . . . .	136
<b>3</b>	<b>O Modelo Linear Geral</b>	<b>139</b>
3.1	Introdução . . . . .	139
3.2	Erros Independentes . . . . .	139
3.3	Erros com Variância Geral . . . . .	155
3.3.1	Modelos com Resposta Binária . . . . .	160
3.3.2	Erros Definidos por Séries Temporais Estacionárias . . . . .	164
3.4	Variável Dependente Defasada . . . . .	174
3.4.1	Variáveis Instrumentais . . . . .	174
3.4.2	Estimador de Hatanaka . . . . .	175
3.4.3	Estimador de Máxima Verossimilhança . . . . .	177
3.4.4	Estimador Não-Linear . . . . .	177
3.5	Exercícios . . . . .	183
3.6	Referências . . . . .	186
<b>4</b>	<b>Diagnóstico em Regressão</b>	<b>191</b>
4.1	Introdução . . . . .	191
4.2	Teste da Especificação $E(Y) = X\beta$ . . . . .	192
4.3	Análise Residual . . . . .	201
4.3.1	Constância da Variância . . . . .	203
4.3.2	Diagnóstico de Linearidade da Resposta . . . . .	218
4.3.3	Correlação Serial e Espacial . . . . .	220
4.3.4	Observações Influentes . . . . .	239
4.3.5	Diagnóstico de Normalidade . . . . .	265

4.4	Multicolinearidade . . . . .	278
4.4.1	Introdução . . . . .	278
4.4.2	Diagnóstico . . . . .	281
4.4.3	Medidas Corretivas . . . . .	287
4.5	Exercícios . . . . .	288
4.6	Referências . . . . .	294
<b>5</b>	<b>Modelos Não-Lineares: Teoria</b>	<b>297</b>
5.1	Introdução . . . . .	297
5.2	A Regressão Não-Linear . . . . .	298
5.2.1	Estimação . . . . .	299
5.2.2	Testes de Hipóteses Estatísticas . . . . .	305
5.3	Seqüências Cesaro Somáveis . . . . .	306
5.4	Consistência Forte . . . . .	313
5.5	Normalidade Assintótica . . . . .	316
5.6	Os Testes de Wald, ML e RV . . . . .	329
5.6.1	Teste de Wald . . . . .	329
5.6.2	Teste dos Multiplicadores de Lagrange . . . . .	331
5.6.3	Teste da Razão de Verossimilhança . . . . .	334
5.6.4	Observações Gerais Sobre as Estatísticas $W_n$ , $R_n$ e $RV_n$ . . . . .	336
5.7	Distribuição do Estimador Restrito . . . . .	337
5.8	Exercícios . . . . .	339
5.9	Referências . . . . .	341
<b>6</b>	<b>Modelos Não-Lineares: Prática</b>	<b>343</b>
6.1	Introdução . . . . .	343
6.2	Condições de Regularidade . . . . .	344
6.3	Estimadores de MQO Não-Lineares . . . . .	346
6.4	A Geometria de MQO Não-Lineares . . . . .	347
6.5	Propriedades Distribucionais . . . . .	348
6.6	Cálculo de MQO Não-Lineares . . . . .	349
6.7	Estimação e Testes de Hipóteses . . . . .	367
6.7.1	Procedimento de Wald . . . . .	367

6.7.2	Teste RV . . . . .	371
6.7.3	Teste ML . . . . .	374
6.8	Potência de Testes Estatísticos . . . . .	377
6.9	Resíduos em Séries de Tempo . . . . .	378
6.10	Exercícios . . . . .	389
6.11	Referências . . . . .	393
<b>7</b>	<b>Diagnóstico no Modelo Geral</b>	<b>395</b>
7.1	Introdução . . . . .	395
7.2	Teste da Especificação $E(Y) = f(\theta^0)$ . . . . .	396
7.3	Constância da Variância . . . . .	400
7.4	Observações Influentes . . . . .	412
7.5	Medidas de Curvatura . . . . .	418
7.5.1	Cálculo de Curvatura . . . . .	423
7.6	O Viés de Box . . . . .	436
7.7	Exercícios . . . . .	442
7.8	Referências . . . . .	443
<b>8</b>	<b>Métodos Empíricos</b>	<b>445</b>
8.1	Introdução . . . . .	445
8.2	O Método “Bootstrap” . . . . .	446
8.3	Intervalos “Bootstrap” . . . . .	451
8.4	O “Bootstrap” na Regressão . . . . .	465
8.5	Exercícios . . . . .	480
8.6	Referências . . . . .	483